令和５年度入学試験問題（後期日程）

数　　　　　学

中等教育教員養成課程
中等教育プログラム　数学専攻

注意事項

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**
2. 解答紙は４枚（４の１，４の２，４の３，４の４）あります。
3. 試験開始後，各解答紙の上部の２箇所に受験番号を記入しなさい。また，計算紙にも受験番号を記入しなさい。
4. 解答はすべて解答紙の所定の解答欄に記入しなさい。**解答紙の裏面に記入した解答は採点の対象になりません。**
5. 定規，コンパスは使用できません。

〔1〕　次の問いに答えよ。

（問1）　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $1 + 4\cos\theta - 2\cos 2\theta < 0$ をみたす θ の範囲を求めよ。

（問2）　a，b は互いに素な自然数で $b > 2$ とする。このとき，

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots,\ (b-1)a$$

を b で割った余りが全て異なることを示せ。

（問3）　極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \log\left(\frac{n+k}{n}\right)$$

の値を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

〔2〕　$\triangle$OAB において，辺 OA を $1:2$ に内分する点を C とし，辺 OB を $3:1$ に外分する点を D とする。線分 CD と辺 AB の交点を E とし，線分 OE，BC，AD の中点をそれぞれ F，G，H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。次の問いに答えよ。

（問1）　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

（問2）　$\overrightarrow{\mathrm{FH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

（問3）　3 点 F，G，H が一直線上にあることを示せ。

〔3〕 関数 $f(x)$ は常に正の値をとり，どんな実数 x，y についても

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

が成り立っている。次の問いに答えよ。

（問１） x を実数とするとき，$f\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{f(x)}$ が成り立つことを示せ。

（問２） k を自然数とする。初項 1，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 2^k+1 項から第 2^{k+1} 項までの和

$$S=a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+a_{2^k+3}+\cdots+a_{2^{k+1}}$$

を求めよ。

（問３） n を自然数とする。2^n 個の実数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2^n}$ に対して

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2^n}}{2^n}\right) \leqq \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2^n})}{2^n}$$

が成り立つことを，n に関する数学的帰納法によって示せ。

〔4〕 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\,dx \ (n=0, 1, 2, \cdots)$ とする。次の問いに答えよ。ただし，$\tan^0 x=1$ とする。

（問１） I_0 および I_1 の値を求めよ。

（問２） n を 0 以上の整数とするとき，

$$I_n+I_{n+1}=\frac{1}{2n+1}$$

が成り立つことを示せ。

（問３） 無限級数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

の和を求めよ。